Integrálfüggvény, Improprius integrál, Alkalmazások

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Integrálfüggvény, Improprius integrál, Alkalmazások

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Az integrálfüggvény definíciója

Az integrált egy véges szakaszon a függvény alatti területnek definiáltuk. Érdemes definiálni a

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

mennyiséget rögzített $x_0 \in \mathbb{R}$ mellett. F-et integrálfüggvénynek nevezzük.

Az integrálfüggvény definíciója

Az integrált egy véges szakaszon a függvény alatti területnek definiáltuk. Érdemes definiálni a

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$$

mennyiséget rögzített $x_0 \in \mathbb{R}$ mellett. F-et integrálfüggvénynek nevezzük.

Tétel

Ha $f \in R_{[a,b]}$, akkor F folytonos, és ha ráadásképp f folytonos is, akkor $F'(x) = f(x)$.

Példa az integrálfüggvényre

Például az

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(x)$$

függvényt zárt alakban nem tudjuk felírni, de tudjuk, hogy:

Példa az integrálfüggvényre

Például az

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(x)$$

függvényt zárt alakban nem tudjuk felírni, de tudjuk, hogy:

1. $F(0) = 0$,
2. $F'(x) = e^{-x^2} > 0$, tehát monoton nő,
3. $F''(x) = -2x\,e^{-x^2}$ tehát konvex, ha $x < 0$ és konkáv, ha $x > 0$,

Háttér

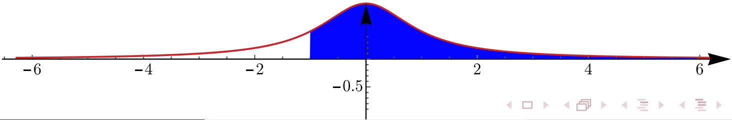
Eddig az integrált csak korlátos intervallumon, korlátos függvényre definiáltuk. De ugyanúgy kérdés lehet (akár egy fizikai rendszernél is), hogy mi az integrálja egy esetleg nem korlátos függvénynek és/vagy egy esetleg nem korlátos intervallumon.

Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrált, mint egy határérték:



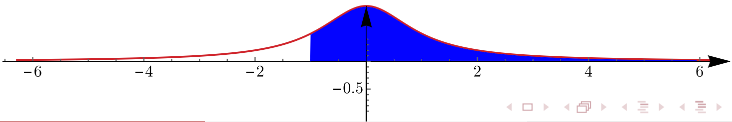
Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{dx}$$



Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

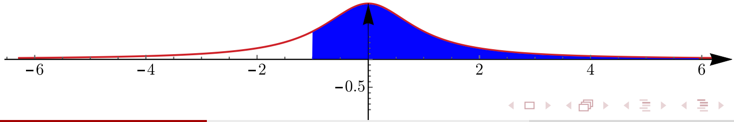
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

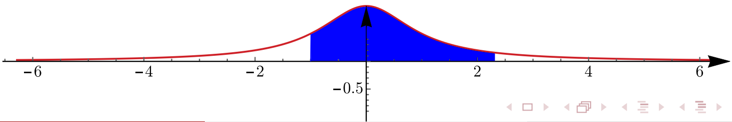
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,dx$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

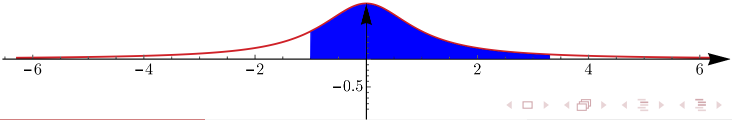
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

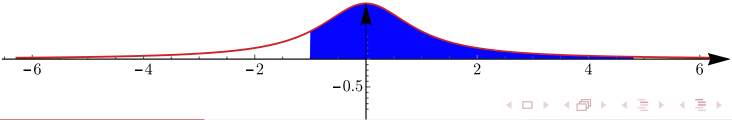
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

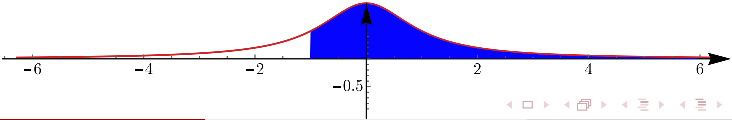
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{0}^{+\infty} 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty}[x]_0^A = \lim_{A\to+\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to+\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to+\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \sin(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} [-\cos(x)]_0^A = \lim_{A\to+\infty} (1-\cos(A))$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} 1\,dx = \lim_{A\to+\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to+\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx = ?$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \sin(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} [-\cos(x)]_0^A = \lim_{A\to+\infty} (1-\cos(A))$$

Ennek sem létezik határértéke.

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} \, \mathrm{dx} = ?$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} x^{-3}\,\mathrm{dx} =$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} x^{-3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^A =$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} x^{-3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{2A^2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} =?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} x^{-3}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{2A^2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ez konvergens.

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,dx = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$x = -2 \Rightarrow B = -2$, $x = 1 \Rightarrow A = 2$, innen

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$x = -2 \Rightarrow B = -2$, $x = 1 \Rightarrow A = 2$, innen

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \int_{2}^{A} \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= 2 \lim_{A\to+\infty} \left[\ln|x-1| - \ln|x+2|\right]_2^A = 2\left(\lim_{A\to+\infty} \ln|A-1| - \ln|A+2| + \ln(4)\right) =$$

$$= 2 \lim_{A\to+\infty} \ln \underbrace{\left|\frac{A-1}{A+2}\right|}_{\to 1} + 2\ln(4) = 2\ln(4).$$ Ez konvergens.

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+\frac{4x^2}{4}}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{-1} \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{dx} =$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+\frac{4x^2}{4}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{1}{4}\frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \left(\frac{\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\right) - \lim_{A\to-\infty} \frac{\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}{2}$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+\frac{4x^2}{4}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{1}{4}\frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_{A}^{-1} = \left(\frac{\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\right) - \lim_{A\to-\infty} \frac{\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{2}.$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+\frac{4x^2}{4}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{1}{4} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{1}{4} \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_{A}^{-1} = \left(\frac{\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\right) - \lim_{A\to-\infty} \frac{\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{2}.$$

Tehát konvergens.

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,dx =$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}}$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}}$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}}$$

Tehát konvergens.

Fontos megjegyzés

Megjegyzés: Az $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrált (ahol a és b lehet $\pm\infty$ is) csak akkor mondjuk konvergensnek, ha minden $c \in (a,b)$-re

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrálok konvegensek.

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \lim_{B\to+\infty} \int_{-A}^{B} x\,\mathrm{dx}$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor az integrál minden A-ra 0 lenne, így

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \lim_{B\to+\infty} \int_{-A}^{B} x\,\mathrm{dx}$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor az integrál minden A-ra 0 lenne, így

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

De a fenti megjegyzésben $c = 0$-t választva

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{A} = +\infty,$$

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty}\lim_{B\to+\infty}\int_{-A}^{B} x\,\mathrm{dx}$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor az integrál minden A-ra 0 lenne, így

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

De a fenti megjegyzésben $c = 0$-t választva

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{A} = +\infty, \quad \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{0} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{0} = -\infty,$$

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \lim_{B\to+\infty} \int_{-A}^{B} x\,dx$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor az integrál minden A-ra 0 lenne, így

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

De a fenti megjegyzésben $c = 0$-t választva

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{A} = +\infty, \quad \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{0} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{0} = -\infty,$$

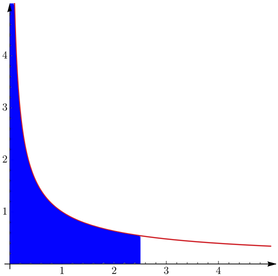
Tehát ez az improprius integrál divergens. (Viszont szokták azt mondani, hogy a Cauchy-féle főértéke véges.)

Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos a egy jobboldali pontozott környezetében (f tipikusan nincs is értelmezve a-ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:



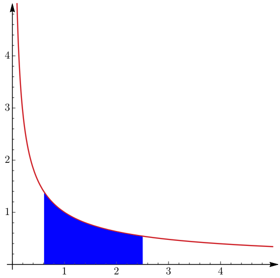
Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos a egy jobboldali pontozott környezetében (f tipikusan nincs is értelmezve a-ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega\to a+} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



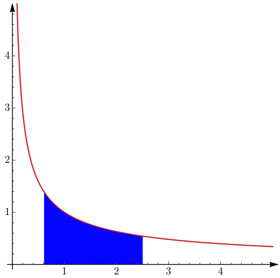
Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos a egy jobboldali pontozott környezetében (f tipikusan nincs is értelmezve a-ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a+} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



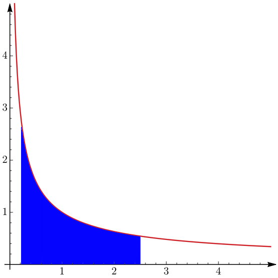
Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos a egy jobboldali pontozott környezetében (f tipikusan nincs is értelmezve a-ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a+} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



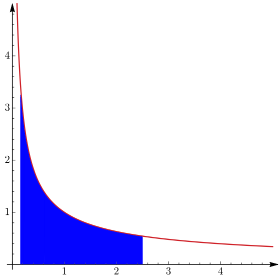
Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos a egy jobboldali pontozott környezetében (f tipikusan nincs is értelmezve a-ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a+} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



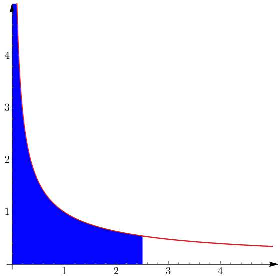
Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos a egy jobboldali pontozott környezetében (f tipikusan nincs is értelmezve a-ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a+} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos b egy baloldali pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos b egy baloldali pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to b-} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{dx}$$

Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos $c \in (a,b)$ egy pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy f nem korlátos $c \in (a,b)$ egy pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to c-} \int_a^{\omega} f(x)\,\mathrm{dx} + \lim_{\varepsilon \to c+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{dx}$$

Itt is igaz a Fontos megjegyzés! Lásd: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$ impr. integrál divergens.

Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega\to 1-} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{dx} =$$

Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega\to 1-} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_{\omega\to 1-} \left[\frac{\arcsin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}} \right]_0^\omega = \lim_{\omega\to 1-} \frac{2\arcsin^{\frac{3}{2}}(\omega)}{3} - 0 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Területszámítás

Az f és g függvények grafikonjai által közbezárt terület:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{dx}$$

Területszámítás

Az f és g függvények grafikonjai által közbezárt terület:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

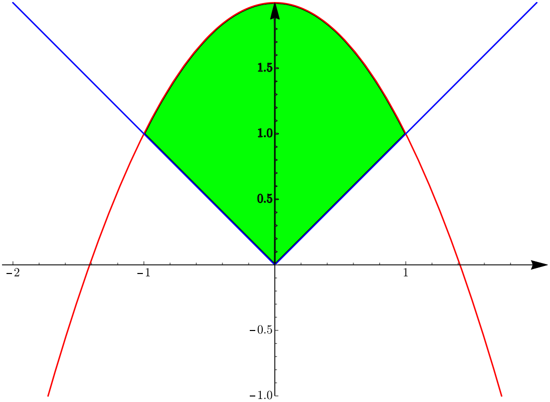
Ahol, a és b f és g függvények grafikonjainak metszéspontjai, azaz az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai.

Területszámítás Példa

Példa: Számítsuk ki az $|x|$ és a $2 - x^2$ függvények által közbezárt területet.

Területszámítás Példa

Példa: Számítsuk ki az $|x|$ és a $2 - x^2$ függvények által közbezárt területet.



Területszámítás Példa

Példa: Számítsuk ki az $|x|$ és a $2 - x^2$ függvények által közbezárt területet.

Területszámítás Példa

Példa: Számítsuk ki az $|x|$ és a $2 - x^2$ függvények által közbezárt területet.

Megoldás:

$$\int_{-1}^{1} \left|2 - x^2 - |x|\right| \mathrm{dx} = 2\int_{0}^{1} 2 - x^2 - x \, \mathrm{dx} = 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

Területszámítás Példa

Példa: Számítsuk ki az $|x|$ és a $2 - x^2$ függvények által közbezárt területet.

Megoldás:

$$\int\limits_{-1}^{1} \left|2 - x^2 - |x|\right| \, \mathrm{dx} = 2 \int\limits_{0}^{1} 2 - x^2 - x \, \mathrm{dx} = 2 \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2 \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0\right] =$$

Területszámítás Példa

Példa: Számítsuk ki az $|x|$ és a $2 - x^2$ függvények által közbezárt területet.

Megoldás:

$$\int_{-1}^{1} \left|2 - x^2 - |x|\right| \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} 2 - x^2 - x \, \mathrm{d}x = 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0\right] = 2\frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

Ívhossz

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az a és b között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Ívhossz

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az a és b között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki $\cosh(x)$ grafikonjának hosszát -145 és 145 között:

Ívhossz

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az a és b között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Példa: Számoljuk ki $\cosh(x)$ grafikonjának hosszát -145 és 145 között:
Ekkor $a=-145$, $b=145$ $f(x)=\cosh(x)$. Így:

Ívhossz

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az a és b között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Példa: Számoljuk ki $\cosh(x)$ grafikonjának hosszát -145 és 145 között:
Ekkor $a=-145$, $b=145$ $f(x)=\cosh(x)$. Így:

$$\int_{-145}^{145} \sqrt{1+(\cosh'(x))^2}\,dx = \int_{-145}^{145} \sqrt{1+\sinh^2(x)}\,dx =$$

Ívhossz

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az a és b között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki $\cosh(x)$ grafikonjának hosszát -145 és 145 között:
Ekkor $a=-145$, $b=145$ $f(x)=\cosh(x)$. Így:

$$\int_{-145}^{145} \sqrt{1+(\cosh'(x))^2}\,\mathrm{dx} = \int_{-145}^{145} \sqrt{1+\sinh^2(x)}\,\mathrm{dx} =$$

$$\int_{-145}^{145} \cosh(x)\,\mathrm{dx} = \sinh(145)-\sinh(-145) = 2\sinh(145)$$

Forgástestek térfogata

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}$$

Forgástestek térfogata

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Forgástestek térfogata

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor $a = -1,\ b = 1\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Így:

Forgástestek térfogata

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor $a = -1$, $b = 1$ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Így:

$$\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \qquad .$$

Forgástestek térfogata

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor $a = -1$, $b = 1$ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Így:

$$\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{dx} = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right)\right] = \frac{4\pi}{3}.$$

Forgástestek térfogata

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:
Ekkor $a=-1$, $b=1$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Így:

$$\pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{dx} = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right)\right] = \frac{4\pi}{3}.$$

Gömb térfogata: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$.

Forgástestek felszíne

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test "palástjának a területe", avagy felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Forgástestek felszíne

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test "palástjának a területe", avagy felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét:

Forgástestek felszíne

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test "palástjának a területe", avagy felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét:

Ekkor $a=-1,\ b=1\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Így:

Forgástestek felszíne

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test "palástjának a területe", avagy felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét:

Ekkor $a=-1$, $b=1$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Így:

$$2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = 2\pi \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{dx} =$$

Forgástestek felszíne

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test "palástjának a területe", avagy felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét:

Ekkor $a=-1$, $b=1$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Így:

$$2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = 2\pi \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{dx} = 4\pi.$$

Forgástestek felszíne

Ha f folytonos (a,b)-n, akkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test "palástjának a területe", avagy felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Példa: Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét:

Ekkor $a=-1$, $b=1$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Így:

$$2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = 2\pi \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{dx} = 4\pi.$$

Gömb felszíne: $A = 4r^2\pi$.

Félév során vettük

1. Lineáris algebra (mátrixok, vektorok Gauss-elimináció)
2. Sorozatok határértéke
3. Függvények határértéke
4. Komplex Számok
5. Differenciál, deriválás (függvényvizsgálat)
6. Integrálás